Zuerst kann man feststellen, dass die Menge aller rot-gefärbten Zahlen die Komplementärmenge der Menge aller grün-gefärbten Zahlen bezüglich der Menge der positiven ganzen Zahlen ist, da eine Zahl entweder rot oder grün gefärbt sein kann. Wenn R die Menge aller rot-gefärbten Zahlen bezeichnet und G die Menge aller grün-gefärbten Zahlen, so kann obige Aussage ausgedrückt werden durch:

$$R \cup G = \mathbb{Z}^+ \wedge R = \bar{G} \wedge \bar{R} = G$$

Die anderen 3 Eigenschaften können wie folgt mathematisch ausgedrückt werden:

$$\forall a, b, c \in R : (a + b + c) \in R \wedge \forall a, b, c \in G : (a + b + c) \in G \tag{1}$$

$$R \neq \emptyset \wedge G \neq \emptyset \tag{2}$$

Behauptung:
Es gibt genau 2 mögliche Färbungen, die diese Eigenschaften besitzen:

(1) Alle ungeraden Zahlen sind rot gefärbt, alle geraden grün.
(2) Alle ungeraden Zahlen sind grün gefärbt, alle geraden rot.

Beweis „ $\Longrightarrow$ “ (nur die oben angebenen Färbungen können möglich sein): Es gelten für R und G obige Eigenschaften und mit X sei o. B. d. A. entweder R oder G bezeichnet, wobei dies wegen der Symmetrie ihrer Eigenschaften egal ist. Dann kann man festlegen:

$$1 \in X$$

Dann muss wegen (1) auch gelten:

$$1 \in X \implies (1 + 1 + 1) = 3 \in X \implies (3 + 1 + 1) = 5 \in X \implies \ldots$$

Mit Hilfe von Induktion lässt sich leicht zeigen, dass dass alle ungeraden Zahlen gleich gefärbt sein müssen.

Induktion:
z. Z.:

$$1 \in X \wedge p \in X \implies \forall k \in \mathbb{Z}_0^+ : (2k + p) \in X \tag{3}$$

Induktionsanfang: $k = 0$
$p \in X \implies (2 \cdot 0 + p) = p \in X$
Induktionsannahme: $(2k + p) \in X$
Induktionsschluss: Aus (1) folgt:

$$1 \in X \wedge (2k + p) \in X \implies (2\,(k + 1) + p) = ((2k + p) + 1 + 1) \in X$$

Für $p = 1$ folgt schon die obige Aussage. Mit einem Widerspruchsbeweis kann gezeigt werden, dass auch alle geraden Zahlen gleich gefäbrt sein müssen — und zwar mit der anderen Farbe:

Annahme: Es gibt gerade Zahlen $\in X$. Sei p die kleinste gerade Zahl $\in X$.

Fall $p = 2$

Mit (3) folgt: $\forall k \in \mathbb{Z}_0^+ : (p + 2k) \in X$. Dann sind alle geraden und alle ungeraden Zahlen gleich gefärbt, d.h. $\bar{X} = \varnothing$, was im Widerspruch zu (2) steht.

Fall $p \neq 2$

Dann folgt daraus, dass $2 \in \bar{X}$ und dann kann mit einer ähnlichen Induktion wie oben leicht gezeigt werden, dass dann auch $2 \in \bar{X} \implies 6 = 2 + 2 + 2 \in \bar{X} \implies 10 = 6 + 2 + 2 \in \bar{X} \implies \cdots$ und allgemein für $l \in \mathbb{Z}_0^+$ gilt: $(4l + 2) \in \bar{X}$.
Es ist offensichtlich, dass es gerade Zahlen gibt, die sich durch $p+2k$ und $4l+2$ darstellen lassen und somit nach (1) sowohl Element von

X und als auch von $\bar{X}$ sein müssten, was aber natürlich ein Widerspruch ist (sei z.B. $l = p \implies k = 3\frac{p}{2} + 1 \in \mathbb{Z}_0^+$, da $2 \mid p$).

Es kann also keine kleinste gerade Zahl $\in X$ geben und somit überhaupt keine geraden Zahlen $\in X$. Alle geraden Zahlen sind also $\in \bar{X}$.

D. h. entweder sind alle geraden Zahlen rot gefärbt und alle ungeraden Zahlen grün gefärbt oder umgekehrt, etwas anderes ist nicht möglich. Es gibt also maximal 2 derartige Färbungen.

Beweis: „$\Longleftarrow$“ (die beiden Färbungen erfüllen die Eigenschaften): Jetzt muss nur noch gezeigt werden, dass es genau 2 derartige Färbungen gibt. Dazu macht man die Probe und überprüft, ob die Färbungen auch wirklich alle Eigenschaften erfüllen:

Der Übersichtlichkeit halber wird wieder die Menge X als Platzhalter für R oder G benutzt. Es gelte also für $x \in \mathbb{Z}^+$:

$$2 \nmid x \implies x \in X \wedge 2 \mid x \implies x \in \bar{X}$$

Zum Beweis der 1. Eigenschaft:

$$\begin{aligned} 2 \nmid a, b, c &\implies 2 \nmid (a+b+c) \\ \iff a \equiv b \equiv c \equiv 1 (\mathrm{mod} 2) &\implies a+b+c \equiv 3 \equiv 1 (\mathrm{mod} 2) \\ \iff a, b, c \in X &\implies (a+b+c) \in X \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 2 \mid a, b, c &\implies 2 \mid (a+b+c) \\ \iff a \equiv b \equiv c \equiv 0 (\mathrm{mod} 2) &\implies a+b+c \equiv 0 (\mathrm{mod} 2) \\ \iff a, b, c \in \bar{X} &\implies (a+b+c) \in \bar{X} \end{aligned}$$

Zum Beweis der 2. Eigenschaft:

$$\begin{aligned} 1 \in X &\implies X \neq \emptyset \\ 2 \in \bar{X} &\implies \bar{X} \neq \emptyset \end{aligned}$$

Außerdem ist es offensichtlich, dass die geraden Zahlen zusammen mit den ungeraden Zahlen die Menge der ganzen Zahlen ausmachen.

Damit erfüllen beide Färbungen alle 3 geforderten Eigenschaften und es ist gezeigt, dass es genau 2 derartige Färbungen gibt. Bei der einen Färbung sind alle geraden Zahlen rot und alle ungeraden grün und bei der anderen alle geraden Zahlen grün und alle ungeraden Zahlen rot gefärbt.