Behauptung:

Die nicht-negativen, ganz-zahligen Lösungen der Gleichung $\left[\frac{x}{a}\right] = \left[\frac{x}{a+1}\right]$ mit $a \in \mathbb{Z}^+$ lauten:

(1) $\quad x = na + n + q$ mit $n \in \{0, 1, \ldots, a-1\}$ und $q \in \{0, 1, \ldots, a-n-1\}$

Das sind insgesamt

$$\sum_{n=0}^{a-1} (a-n) = a^2 - \sum_{n=0}^{a-1} n = a^2 - \frac{a\,(a-1)}{2} = \frac{a\,(2a-a+1)}{2} = \frac{a\,(a+1)}{2}$$

Lösungen.

Beweis:

„ $\Longrightarrow$ “ Jede Lösung x hat die Form (1): Sei

$$x = ma + p; m, p \in \mathbb{Z}_0^+ \text{ und } p < a$$

und

$$x = n\,(a+1) + q = na + n + q; n, q \in \mathbb{Z}_0^+ \text{ und } q < a+1$$

Dann gilt:

$$\frac{p}{a} < 1 = \frac{a}{a} \text{ und } \frac{q}{a+1} < 1 = \frac{a+1}{a+1}$$

Daraus folgt:

$$\left[\frac{x}{a}\right] = \left[\frac{ma+p}{a}\right] = \left[m + \frac{p}{a}\right] = m$$
$$\left[\frac{x}{a+1}\right] = \left[\frac{n\,(a+1)+q}{a+1}\right] = \left[n + \frac{q}{a+1}\right] = n$$

Das heißt:

$$\left[\frac{x}{a}\right] = \left[\frac{x}{a+1}\right] \iff m = n$$
$$\Longrightarrow ma + p = na + p = x = n\,(a+1) + q = na + n + q$$
$$\iff p = n + q \Longrightarrow n + q = p < a$$

Und daraus folgt einerseits: $q < a - n \iff q \leq a - n - 1$ und andererseits, da $q \geq 0$, $n + q < a \Longrightarrow n < a \iff n \leq a - 1$. Damit ist die eine Richtung bewiesen (man vgl. mit (1)).

„$\Longleftarrow$“ Eine Zahl x der Form (1) löst $\left[\frac{x}{a}\right] = \left[\frac{x}{a+1}\right]$: Es wurden Bedingungen für q und n gefunden. Es muss jetzt noch überprüft werden, ob diese ausreichend sind:

Seien $n, q \in \mathbb{Z}_0^+$ und $q \leq a - n - 1$, $n \leq a - 1$, dann gilt:

$$x := na + n + q$$

$$q < a - n \iff n + q < a \iff \frac{n+q}{a} < 1$$

$$\implies \left[\frac{x}{a}\right] = n$$

$$\text{und mit } n + q < a < a + 1 \implies \frac{n+q}{a+1} < \frac{a}{a+1} < 1$$

$$\implies \left[\frac{x}{a+1}\right] = n$$

$$\implies \left[\frac{x}{a}\right] = \left[\frac{x}{a+1}\right]$$

Damit wurde die Behauptung bewiesen.

Als letztes ist noch anzumerken, dass ein x durch ein n und q eineindeutig bestimmt wird, denn n und q sind nichts anderes als die Resultate einer Division mit Rest von x durch $a + 1$, welche logischerweise eineindeutig bestimmt sind.